Bienvenue !

Visiter

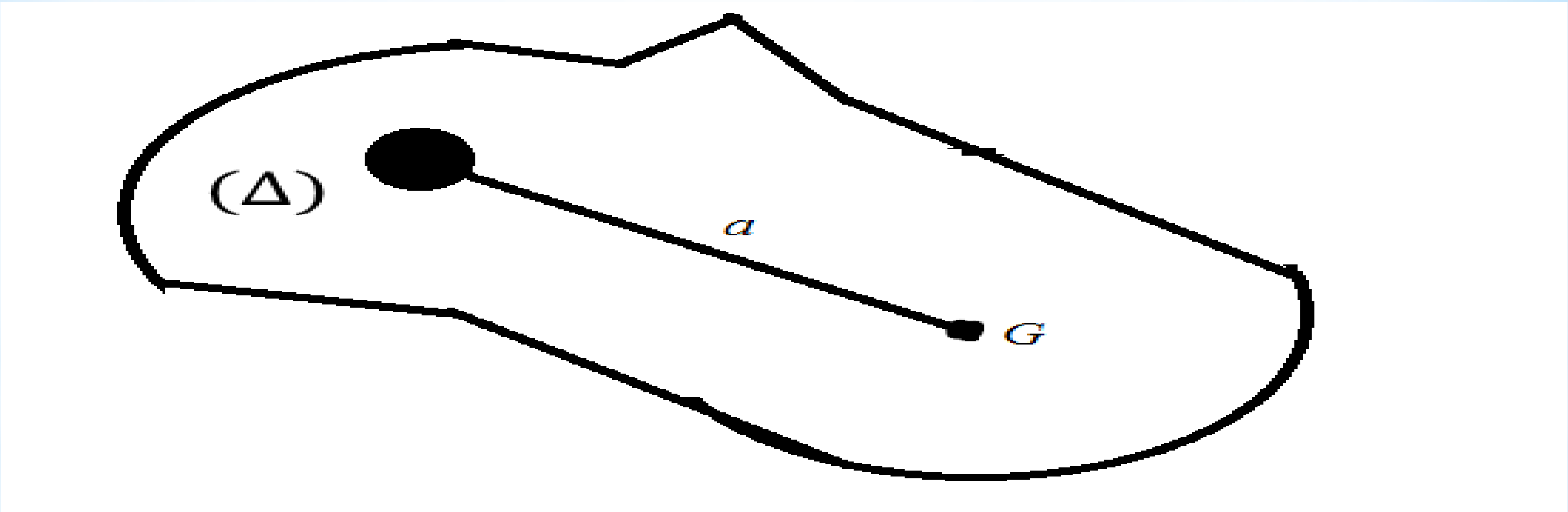
"Physique Fine enjah "

sur youtube

Pour plus comprendre le cours

➢ *<u>Pendule composé :</u> (Pendule pesant **)*

✓ *<u>Définition:</u> Un pendule pesant est un solide (quelconque) de centre de masse G pevant osciller autour d'un axe horizantale fixe* (Δ) *sous l'action de son poids . Supposons que le sens trigonométrique est le sens positive de rotation .*



➢ *Centre de masse:*

Soit G le centre de masse du système formé de n particules de centres de masse respectifs $(G_1; G_2; \dots; G_n)$ *, alors :*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OG_1} + m_2\overrightarrow{OG_2} + \cdots + m_n\overrightarrow{OG_n}}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$$

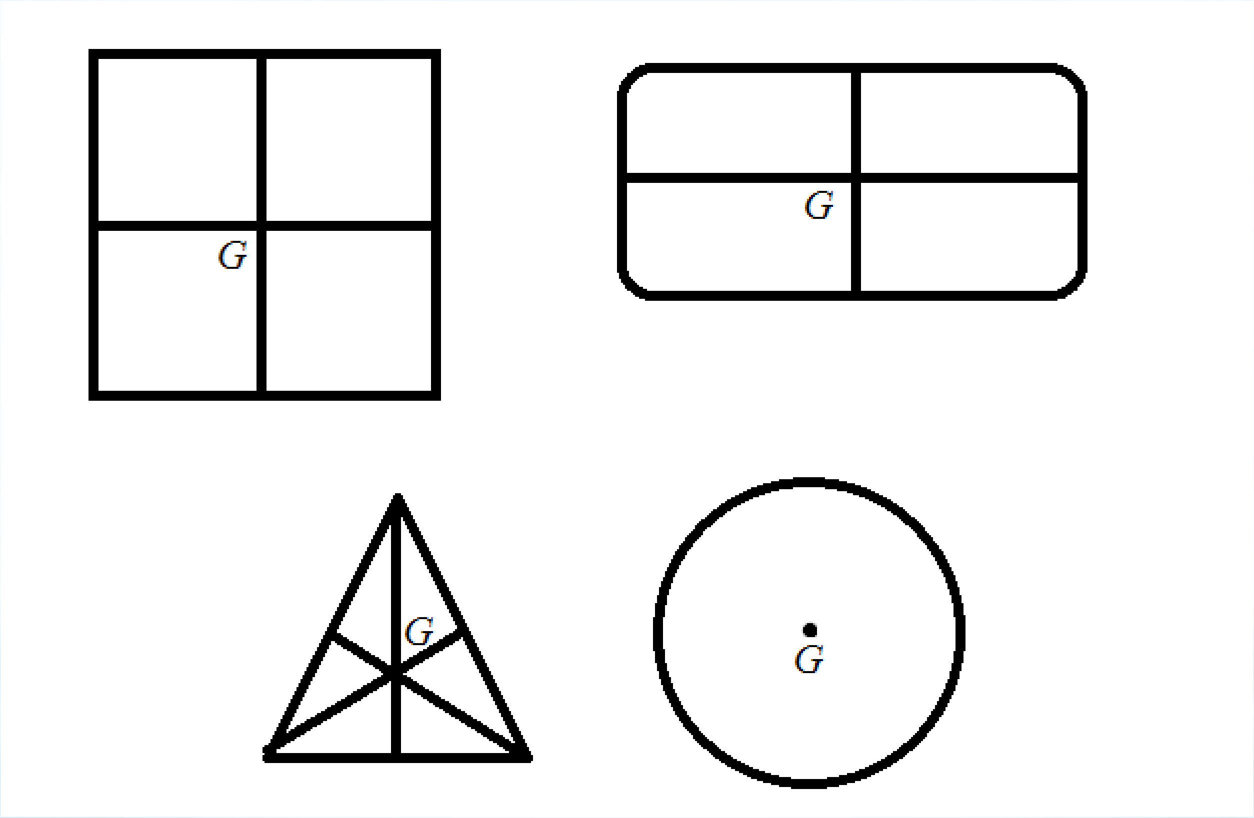
Dans un repère tridimensionnel $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$ *:*

$$X_G = \frac{m_1X_1 + m_2X_2 + m_3X_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_G = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$Z_G = \frac{m_1Z_1 + m_2Z_2 + m_3Z_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

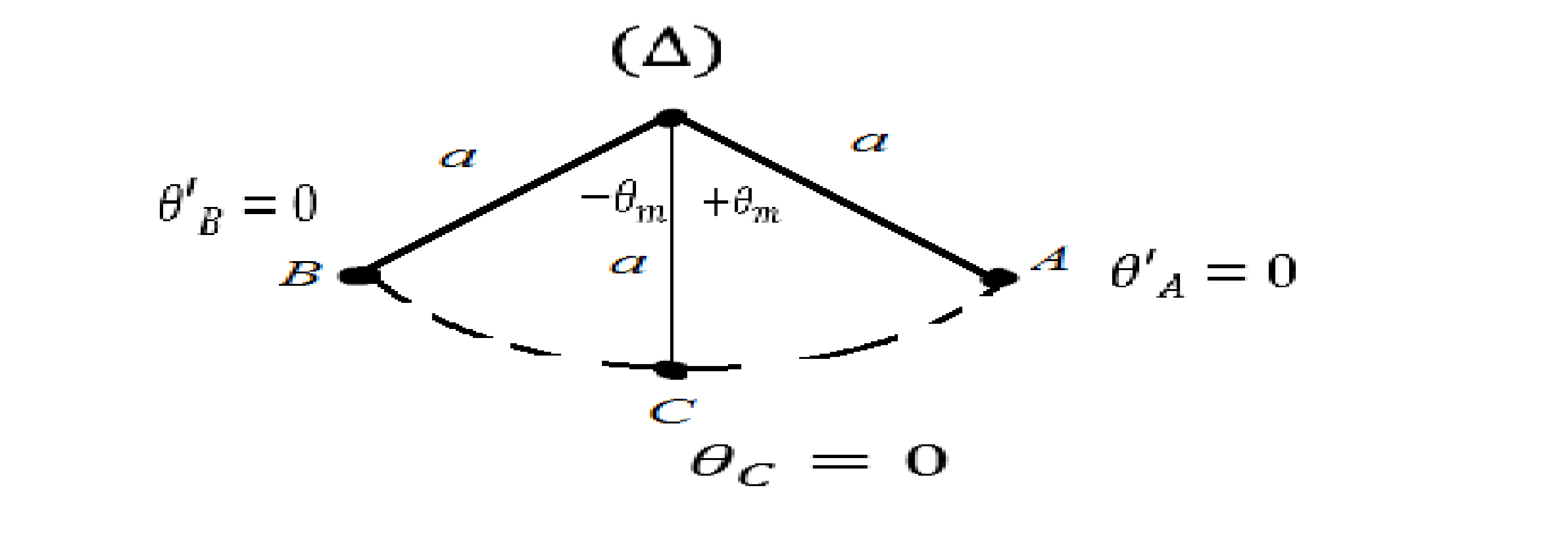
- *Position de centre de masse de quelque solide homogène . On va prendre le centre de masse est celui le centre de gravité :*



- <u>*Etude théorique:*</u>

On déplace le pendule d'un angle maximal θ_m *, puis on le lâche sans vitesse initiale .*

On peut simplifier la figure par celle ci –dessous :



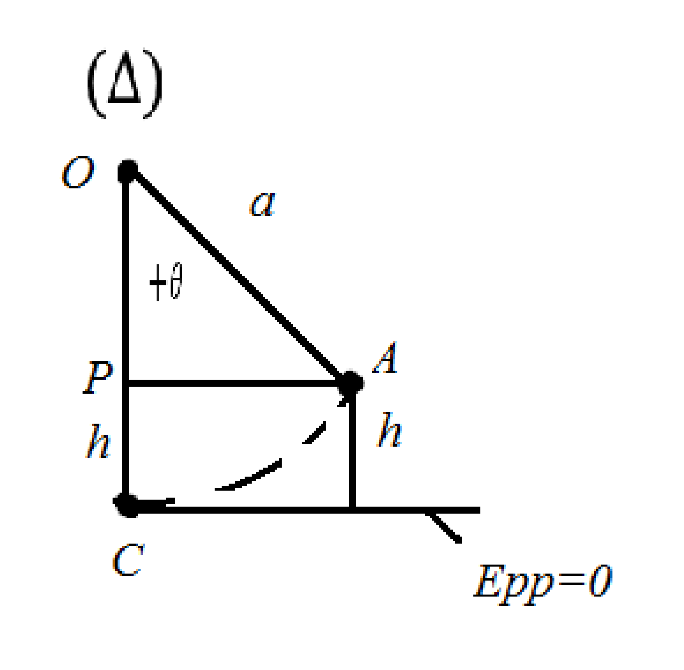
- *On néglige les frottements ,le pendule effectue des oscilliations harmonique simple.*

➢ *Enérgie mécanique :*

Sys : { Pendule pesant , terre } , le niveau de référence de l'énérgie potentielle de pesanteur est le plan horizantale passant par le point C tel que $\theta_C = 0$.

$$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2}I\theta'^2 + mgZ$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}I\theta'^2 + mgh = \frac{1}{2}I\theta'^2 + mg(OC - OP)$$



$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2}I\theta'^2 + mg(a - acos(\theta))$$

Donc : $E_m = \frac{1}{2}I\theta'^2 + mga(1 - cos\theta)$.

➢ *Equation différentielle :*

$\overrightarrow{fr} = \vec{0}$, *donc conservation de l'énérgie mécanique :* $E_m = cte \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$,

$E_m = \frac{1}{2}I\theta'^2 + mga(1 - cos\theta)$, donc $\frac{1}{2}I2\theta'\theta'' + (mga)' - mga(cos\theta)' = 0$

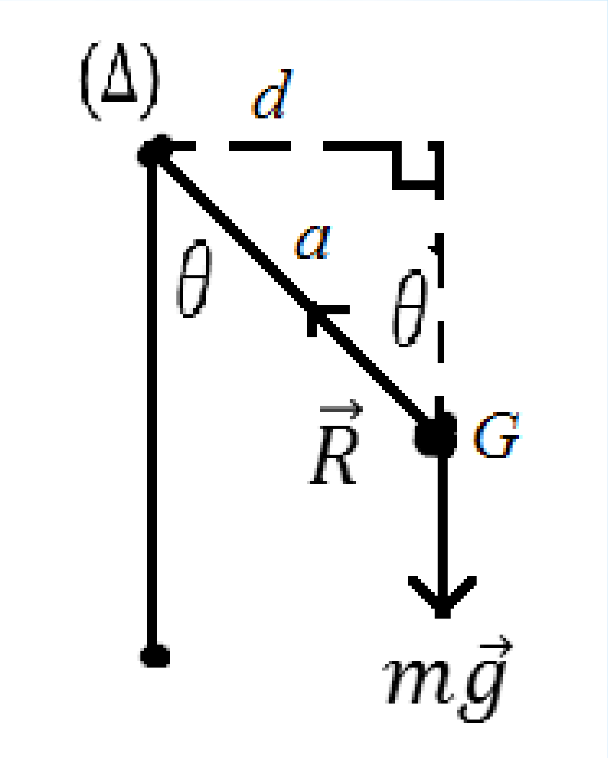
Donc : $I\theta'\theta'' + 0 - mga(-\theta' sin\theta) = 0 \Rightarrow I\theta'' + mgasin\theta = 0$,

Alors : $\theta'' + \frac{mga}{I}sin\theta = 0$, *si* θ_m *est faible càd* $\theta_m < 10^0 = 0.17rd$,

alors $sin\theta = \theta(rd)$, et donc : $\theta'' + \frac{mga}{I}\theta = 0$. *C'est une équation différentielle du second ordre et de la forme* $\theta'' + {\omega_0}^2\theta = 0$, *avec* ${\omega_0}^2 = \frac{mga}{I}$, *alors :* $\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}$,*et de période propre* $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}$.

La solution de cette équation différentielle est : $\begin{cases} \theta = \theta_m \sin\left(\sqrt{\frac{mga}{I}}\, t + \varphi\right), ou \\ \theta = \theta_m \cos\left(\sqrt{\frac{mga}{I}}\, t + \varphi\right) \end{cases}$.

- <u>*Etude théorique :*</u> *Deuxième loi de Newton :*



Sys : { Solide } ,

Forces extérieurs : Poids $m\vec{g}$ *, et la réaction de l'axe* $\vec{R}$ *.*

$M_{\vec{R}} = 0$ *, car* $\vec{R}$ *passe par l'axe* (Δ) *.*

$M_{m\vec{g}} = -mgd = -mga\sin\theta$ *.*

Donc : $\sum M_{\overrightarrow{Fext}} = \frac{d\sigma}{dt} \Rightarrow M_{m\vec{g}} + M_{\vec{R}} = I\theta''$ *,*

Supposons que θ_m *est faible , alors :*

$-mga\theta = I\theta'' \Rightarrow I\theta'' + mga\theta = 0$ *, Donc :*

$\theta'' + \frac{mga}{I}\theta = 0$ *, C'est la même équation différentielle .*

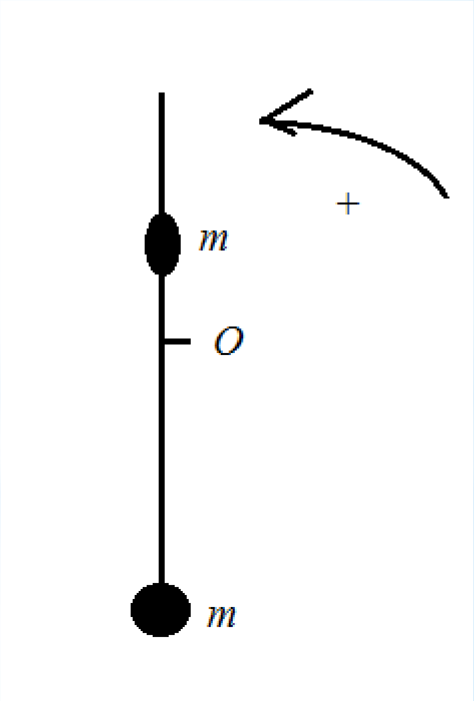
- <u>Remarque:</u> *Le pendule simple est un pendule pesant , tel que le solide est une particule , et* $a = L$ *, Càd ,* $I = mL^2$ *, remplaçons là par l'équation diférentielle :*

$\theta'' + \frac{mga}{I}\theta = 0 \Rightarrow \theta'' + \frac{mgL}{mL^2}\theta = 0 \Rightarrow \theta'' + \frac{g}{L}\theta = 0$ *, C'est l'équation différentielle du pendule simple .*

- <u>Exercice:</u>

Un tige homogène , de longueur $L = 2m$ *et de masse négligeable , est mobile autour d'un axe horizantale , perpendiculaire à la tige et passant par son centre O .*
Deux particules A et B , chacune de masse $m = 0.1\ kg$ *, sont fixées à la tige de part et d'autre de l'axe , l'une à 1 mètre et l'autre à 0.5 mètre .*

Calculer la période propre de cet oscillateur .



<u>Sol:</u> *Idée : détérminer I ,*$a = OG$ *puis* T_0 *, avec G est le centre de masse du système .*

$I = I_{Tige} + I_A + I_B$ *, Or* $m_{tige} = 0$ *, donc* $I_{tige} = 0$ *, alors :*

$I = m(0.5)^2 + m(1)^2 = 0.1(0.25 + 1) = 0.125 kg.m^2$.

Selon l'axe vertical vers le bas , on a :

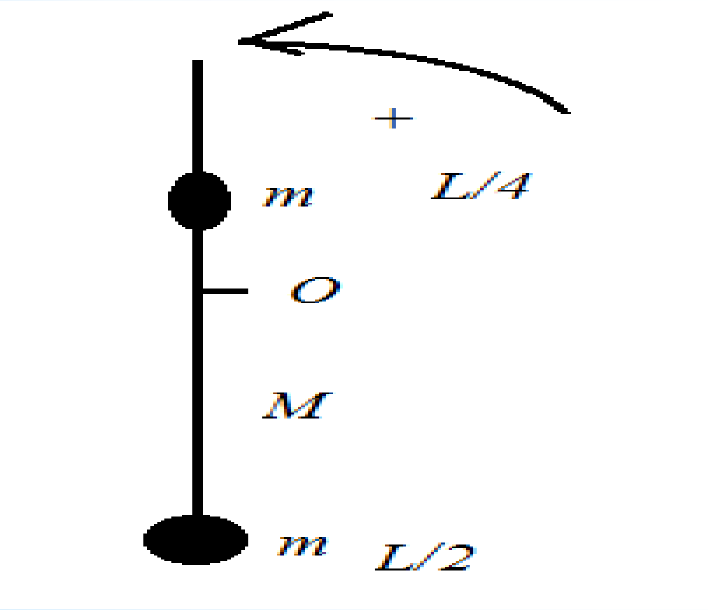
$$y_G = \frac{m_{tige}y_{com\,Tige}+m_A y_A+m_B y_B}{m_T+m_A+m_B} = \frac{0+0.1(-0.5)+0.1(+1)}{0+0.1+0.1} = \frac{0.05}{0.2} = 0.25m$$

Puisque le repère est vers le bas , alors : G est au – dessous de O de 0.25 m .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.125}{0.25\times0.2\times10}} = \pi(s) = 3.14(s)\ .$$

- <u>*Exercice:*</u>

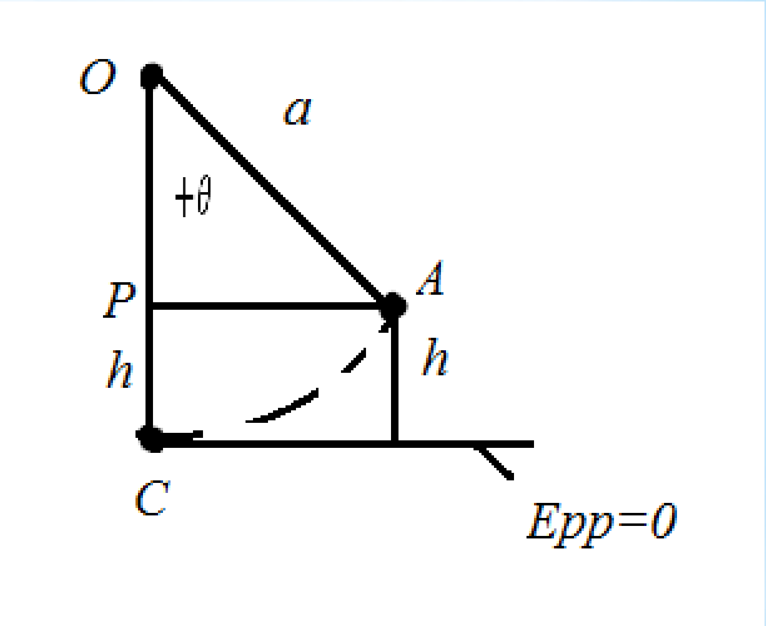
Une tige homogène de longueur L et de masse M est mobile autour d'un axe horizantale perpendiculaire à la tige passant par son centre O . Deux particules , chacune de masse m_P , sont fixées à la tige de part et d'autre de l'axe O , l'une à $\frac{L}{2}$, et l'autre à $\frac{L}{4}$,de O . On écarte le pendule , ainsi constitué , de $\theta_m = 0.1\ rd$ à partir de sa position d'équilibre et on l'abondonne sans vitesse initiale à l'instant $t_0 = 0$.
Le pendule commence à , osciller . Pendant le mouvement , à un instant t , il est à θ de sa position d'équilibre et il possède la vitesse angulaire $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$.



- *Le moment d'inertie du tige par rapport à l'axe O est :* $I_{(O)} = \frac{ML^2}{12}\ kg.m^2$.

➢ *Détérminer l'éxprèssion de l'énérgie mécanique du système , et établir l'équation différentielle du mouvement du centre de masse G du pendule .*

✓ <u>Sol:</u> Sys : { Pendule pesant , terre } ,



$E_m = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} I\theta'^2 + mga(1 - \cos(\theta))$.

Or , $\theta_m = 0.1\, rd < 0.17\, rd$, alors θ_m est faible , donc $\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} \Rightarrow 1 - \cos\theta = \frac{\theta^2}{2}$,

Donc : $E_m = \frac{1}{2} I\theta'^2 + \frac{mga}{2}\theta^2$.

$\overrightarrow{fr} = \vec{0} \Rightarrow E_m = cte \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0$, alors :

$\frac{1}{2} I 2\theta'\theta'' + \frac{mga}{2} 2\theta\theta' = 0 \Rightarrow I\theta'' + mga\theta = 0$

Donc : $\theta'' + \frac{mga}{I}\theta = 0$.

✓ *Cherchons : m , I et a ??*

m est la masse total du système , donc : $m = M + m_P + m_P = M + 2m_P$.

$$I = I_{tige(O)} + I_{P1(O)} + I_{P2(O)} = \frac{ML^2}{12} + m_P\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m_P\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{5m_P L^2}{16} = \frac{4ML^2 + 15m_P L^2}{48}$$

$a = OG$ *, G se trouve sur la tige , car Tout la masse est distribué le long du tige verticalement . Supposons que l'axe des y positif est vertical vers le bas , alors :*

$a = OG = \frac{m_{Tige} y_{Tige} + m_{P1} y_{P1} + m_{P2} y_{P2}}{m} = \frac{0 + m_P\left(-\frac{L}{4} + \frac{L}{2}\right)}{M + 2m_P}$ *, l'axe de rotation passe par le centre de masse de la tige , alors* $y_{tige} = 0$ *, Donc :*

$a = \frac{m_P L}{4M + 8m_P}$ *>0 , alors le centre de masse G est au – dessous de l'axe O .*

Alors , l'équation différentielle sera : $\theta'' + \frac{(M + 2m_P) \times g \times \left(\frac{m_P L}{4M + 8m_P}\right)}{\frac{4ML^2 + 15m_P L^2}{48}} \theta = 0$

Alors $\theta'' + \frac{12 m_P g}{L(4M + 15m_P)} \theta = 0$.

Khaled Soubra - Terminal

C'est une équation différentielle du second ordre , et de la forme $\theta'' + {\omega_0}^2\theta = 0$,

avec ${\omega_0}^2 = \frac{12m_P g}{L(4M+15m_P)} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{12m_P g}{L(4M+15m_P)}}$.

- *Sachant que* $L = 2m$, $M = 2kg$ *et* $m_P = 0.1kg$ *, détérminer la solution de cette équation différentielle . (équation horaire du mouvement de G)*

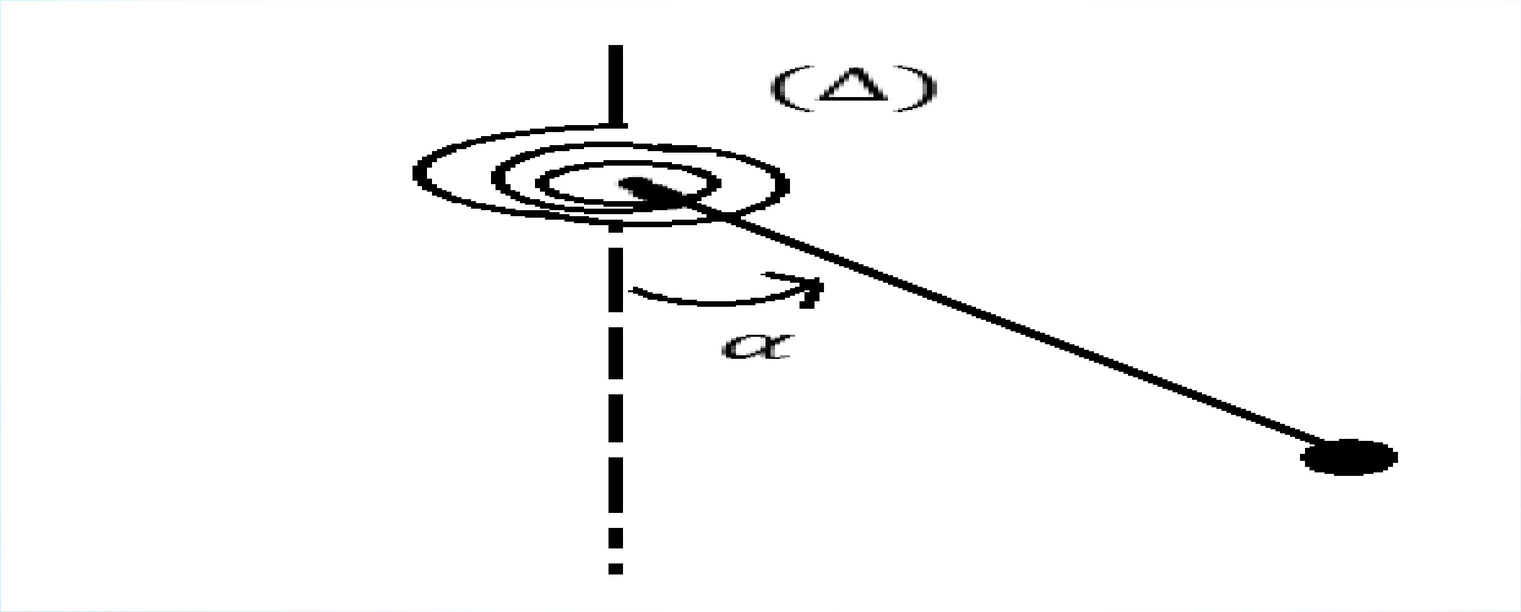
$\theta = \theta_m sin(\omega_0\, t + \varphi)$*, par hypothèse* $\theta_m = 0.1(rd)$ *, et à* $t_0 = 0$ *, on a* $\theta = \theta_m$*,*
alors $\theta_m = \theta_m sin\varphi$ *, alors* $sin\varphi = 1$ *, donc :* $\varphi = \frac{\pi}{2}$ *(rd) .*

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12m_P g}{L(4M+15m_P)}} = \sqrt{\frac{12\times0.1\times10}{2((4\times2)+15(0.1))}} = 2\sqrt{\frac{3}{19}} = 0.79rd/s\ .$$

Donc : $\theta = 0.1\ sin(0.79\ t + \frac{\pi}{2})$*, t en senconde et* θ *en rd .*

➢ *Pendule composé avec ressort : (IMP)*

Une tige homogène de masse m et de longueur 2L , est mobile dans un plan verticale autour d'un axe (Δ) *horizantale passant par l'une de ces 2 éxtrémités O . On fixe à l'autre éxtrémité A une particule de masse* $\frac{m}{3}$ *. En O , un ressort spirale de constant de flexion C exerce un couple de rappel de flexion dont le moment est par rapport à l'axe* (Δ) *s'écrit* $\mu = -C\alpha$ *lorsque le ressort est fléchi d'un petit angle α ou lorsque le tige est à α de sa position d'équilibre verticale .*
Le moment d'inertie de la tige par rapport à l'axe (Δ) *est* $I = \frac{4}{3}mL^2$ *.*



1. *Calculer l'énérgie potentiel totale du système : { Ressort , support , masse , tige , terre } . Supposons l'axe positif vers le bas et le niveau de référence de l'énérgie potentielle de pesanteur est le plan horizantale passant par O .*

➢ <u>Sol:</u> Soit G le centre de masse du système , et $a = OG$.

$$m_{Sys} = m + \frac{m}{3} = \frac{4}{3}m\ .$$

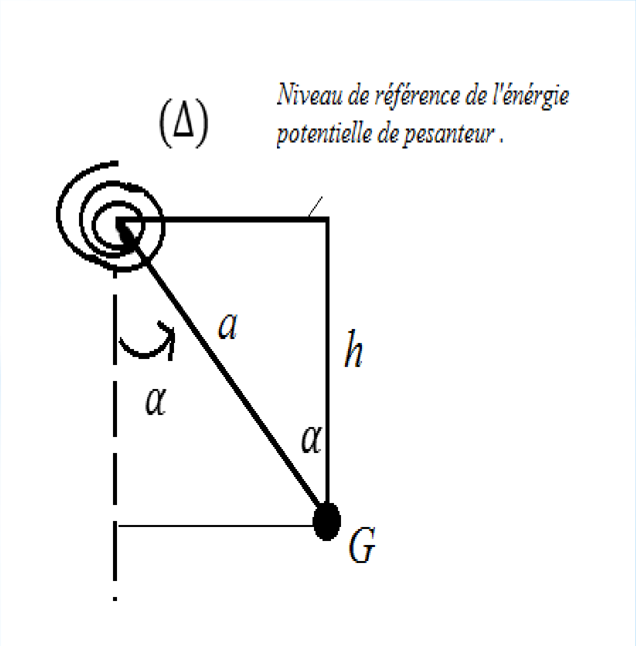
$$I = I_{tige} + I_P = \frac{4}{3}mL^2 + \frac{m}{3}(2L)^2 = \frac{8}{3}mL^2\ .$$

$$a = OG = \frac{m_{tige}y_{tige} + m_P y_P}{m_{Sys}} = \frac{mL + \frac{m}{3}(2L)}{(\frac{4}{3}m)} = \frac{5}{4}L\ .$$

$$E_P = E_{PP} + E_{Pe} = -m_{Sys}ga(cos\alpha) + \frac{1}{2}C\alpha^2$$

Alors : $E_P = \frac{1}{2}C\alpha^2 - \frac{5m_{Sys}gL}{4}(cos\alpha)$.

α est faible , alors :



$E_P = \frac{1}{2}C\alpha^2 - \frac{5m_{Sys}gL}{4}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$, *donc* $E_P = \frac{1}{2}C\alpha^2 - \frac{5\left(\frac{4}{3}m\right)gL}{4}(1 - \frac{\alpha^2}{2})$,

Alors : $E_P = \frac{1}{2}C\alpha^2 - \frac{5mgL}{3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$.

2. *Détérminer l'éxpréssion de l'énérgie mécanique de ce système .*

<u>Sol:</u> Sys: { Ressort , support , masse , tige , terre } ,

$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}I\alpha'^2 + \frac{1}{2}C\alpha^2 - \frac{5mgL}{3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$,

$E_m = \frac{1}{2}(\frac{8}{3})mL^2\alpha'^2 + \frac{1}{2}C\alpha^2 - \frac{5mgL}{3}\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right)$,

$\overrightarrow{fr} = \vec{0} \Rightarrow E_m = cte \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right)mL^2 2\alpha'\alpha" + \frac{1}{2}C2\alpha\alpha' + \frac{5mgL}{3}\alpha\alpha' = 0$

Alors : $\frac{8}{3}mL^2\alpha" + (C + \frac{5mgL}{3})\alpha = 0 \Rightarrow \alpha" + \frac{3C+5mgL}{8mL^2}\alpha = 0$.

- *C'est une équation différentielle du second ordre , et de la forme* $\alpha'' + {\omega_0}^2\alpha = 0$

avec ${\omega_0}^2 = \frac{3C+5mgL}{8mL^2}$ *, alors* $\omega_0 = \sqrt{\frac{3C+5mgL}{8mL^2}}$ *, et de période propre* $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ *, alors :*

$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{8mL^2}{3C+5mgl}}$.

- <u>*Rq:*</u> La condition qui doit rempli ω *, si elle dépend d'un certain variable , pour que les oscillations , soit des oscillations harmonique simple est que* $\omega^2 > 0$ *.*

- *On suppose qu'une force de frottement* $\overrightarrow{fr}$ de moment $M = -b\alpha'$ *, tel que* b est une constante positive . Utiliser la deuxième loi de Newton pour détérminer *l'équation différentielle .*

Sys : { Penudule} , $\sum M_{\overrightarrow{Fext}} = \frac{d\sigma}{dt} \Rightarrow M_{m\vec{g}} + M_{\vec{R}} + \mu + M = I\alpha''$

$-mgasin\alpha + 0 - C\alpha - b\alpha' = I\alpha''$ *, or* $sin\alpha = \alpha$ *,donc :*$\alpha'' + \frac{b}{I}\alpha' + \frac{C+mga}{I}\alpha = 0$ *.*

$$\Rightarrow \alpha'' + \frac{b}{\frac{8}{3}mL^2}\alpha' + \frac{C + \frac{4}{3}m\left(\frac{5}{4}L\right)g}{\frac{8}{3}mL^2}\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha'' + \frac{3b}{8mL^2}\alpha' + \frac{3C + 5mgL}{8mL^2}\alpha = 0$$